

на правах рукописи

КРУТОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

Специальность 05.13.18. — математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Тюмень — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей и прикладной математики  
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
Баутин Сергей Петрович

Официальные оппоненты: Хакимзянов Гаяз Салимович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Институт вычислительных технологий,  
СО РАН, Новосибирск,  
ведущий научный сотрудник

Шабаров Александр Борисович,  
доктор технических наук, профессор,  
ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный  
университет», заведующий кафедрой  
механики многофазных систем

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Уральский Федеральный  
Университет» имени Б. Н. Ельцина

Защита диссертации состоится «05» июня 2013 в 14 часов на заседании дис-  
сертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государ-  
ственный университет» по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А,  
ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Тюменский  
государственный университет».

Автореферат разослан « » апреля 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Е. А. Оленников

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена применению математического моделирования и численных методов для описания придонных течений в восходящих закрученных потоках, имеющих спиральный характер. В основу теоретического исследования положена предложенная в книге Баутина С. П.<sup>1</sup> схема возникновения и устойчивого функционирования восходящего закрученного потока газа.

Исследование поддержано РФФИ, проекты 08-01-00052 и 11-01-00198.

### Актуальность темы

В природе довольно часто встречается интересное явление — восходящий закрученный поток (ВЗП) воздуха. В качестве примеров таких потоков можно привести многочисленные смерчи и торнадо, регулярно наблюдаемые на юге США и в других достаточно теплых и ровных местностях. К подобным явлениям относятся и периодически возникающие тропические циклоны. В книгах Наливкина Д. В.<sup>2</sup> и Вараксина А. Ю. и других<sup>3</sup> приведены многочисленные примеры реальных торнадо и тропических циклонов, наблюдаемых на протяжении большого промежутка времени и приносящих многочисленные разрушения и человеческие жертвы.

Несмотря на то, что много других исследователей на протяжении десятилетий активно занимается проблемой ВЗП, к настоящему времени у них у всех отсутствует достаточно убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений, и подтвержденная как экспериментально, так и адекватным математическим моделированием.

**Объект исследования** — спиральные течения идеального газа.

**Предмет исследования** — методы моделирования течений идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

### Цель диссертационной работы

1. Математическое моделирование течений газа в начальные моменты времени, вызванных заданным стоком из покоящегося в поле тяжести газа в усло-

---

<sup>1</sup>Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008. — 96 с.

<sup>2</sup>Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. — 487 с.

<sup>3</sup>Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. Торнадо. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 344 с.

виях действия силы Кориолиса. Математическое моделирование течений газа в условиях действия указанных сил в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости численными и аналитическими методами.

2. Численное построение трехмерных стационарных спиральных течений, описывающих движение воздуха в придонных частях торнадо и тропических циклонов.

### **Задачи исследования.**

1. Математическое моделирование возникновения закрутки в трехмерных нестационарных течениях газа, являющейся следствием действия силы Кориолиса.

2. Построение приближенных решений системы уравнений газовой динамики, описывающих стационарные трехмерные течения идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

3. Разработка программного пакета, позволяющего определять газодинамические параметры трехмерных стационарных течений газа.

4. Проведение вычислительных экспериментов с целью моделирования течений в придонных частях торнадо различных классов и тропического циклона средней интенсивности.

### **Методы исследования.**

Для формализации и решения поставленных задач использовались современные методы аналитического и численного моделирования. В процессе исследования используется адекватная математическая модель — система уравнений газовой динамики, являющаяся квазилинейной системой уравнений с частными производными. Для этой модели ставятся конкретные начально-краевые задачи, для которых: устанавливаются факты существования и единственности решения. Приближенные решения этих задач строятся с использованием аналитических и численных методов при определении значений начальных коэффициентов сходящихся рядов. Для построения этих коэффициентов, в частности, применяются известные эффективные вычислительные алгоритмы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Научная новизна** результатов работы по трем областям специальности 05.13.18 сводится к следующим положениям.

Математическое моделирование

- Впервые построено решение задачи о стоке газа в условиях действия сил

тяжести и Кориолиса.

#### Численные методы

- При численном нахождении значений начальных отрезков сходящихся рядов, зависящих от трех независимых переменных, впервые проведены расчеты трехмерных стационарных спиральных течений, результаты которых соответствуют данным натуральных наблюдений за торнадо различных классов и за тропическим циклоном средней интенсивности.

#### Комплексы программ

- Создан программный пакет, ориентированный на численное решение рассматриваемых задач с использованием результатов аналитического моделирования. Результатом работы одной части этого комплекса является определение численных значений коэффициентов ряда, в том числе с помощью численного решения системы, состоящей из 14 обыкновенных дифференциальных уравнений. Другая часть комплекса по насчитанным табличным значениям и при последующем решении своей системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений восстанавливает траектории движения отдельных частиц газа. Третья часть комплекса с использованием готового пакета Golden Software Grapher 9 позволяет в различных пространствах и в различных ракурсах визуализировать результаты расчетов. С помощью созданного программного пакета проведены массовые расчеты газодинамических течений. Программный пакет прошел государственную регистрацию.

#### Теоретическая значимость

Впервые в модели движения сплошной среды строго обоснованы факт возникновения в горизонтальном течении закрутки газа и направление этой закрутки под действием силы Кориолиса при наличии радиального стока. Тем самым, в частности, дано теоретическое обоснование результатов соответствующих экспериментальных исследований группы А. Ю. Вараксина, опубликованных в 2008–2012 годах в журнале «Теплофизика высоких температур»<sup>4</sup>.

Впервые поставлена и исследована начально-краевая задача, решение которой моделирует трехмерные стационарные течения, имеющие место в придонных частях ВЗП в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

---

<sup>4</sup> Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н., Таекин С. И. О возможности физического моделирования воздушных смерчей в лабораторных условиях // Теплофизика высоких температур. — 2008. — Т. 46. — № 6. — С. 957–960;

Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н., Горбачев М. А. Метод воздействия на свободные нестационарные воздушные вихри // Теплофизика высоких температур. — 2012. — Т. 50. — № 4. — С. 533–537.

**Практическая значимость работы** состоит в том, что численно полученные решения моделируют сложные течения воздуха, имеющие место в реальных торнадо и тропических циклонах, и дают числовые характеристики газодинамических параметров этих течений.

**Достоверность** результатов обеспечивается использованием адекватной природным течениям математической модели — системы уравнений газовой динамики — и применением классических математических методов для построения решений и исследования их свойств:

- 1) установление фактов о существовании и единственности решений соответствующих начально-краевых задач;
- 2) представление решения в виде сходящихся рядов и использование начальных отрезков рядов для построения приближенных решений;
- 3) использование надежных и эффективных численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов численного моделирования подтверждается успешным тестированием программного инструментария, а также удовлетворительными результатами сопоставления с расчетами других авторов<sup>5</sup> и с результатами натурных наблюдений за природными торнадо и тропическим циклоном.

**На защиту выносятся результаты**, соответствующие пунктам паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

*Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.*

1. Для системы уравнений газовой динамики обосновано существование и единственность решения конкретной характеристической задачи Коши стандартного вида. Начальный отрезок ряда, решающего эту задачу, приближенно моделирует трехмерное нестационарное течение газа при наличии радиального стока в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

*Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

2. Для моделирования течений с радиальным стоком аналитическими и численными методами исследованы свойства первых коэффициентов бесконечных сходящихся рядов и установлены факты возникновения закрутки и ее направления в исследуемом течении газа.

---

<sup>5</sup>Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. — Новосибирск: Наука, 2012. — 152 с.

3. Численными методами приближенно построены трехмерные стационарные течения идеального газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

*Пункт 6: Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента.*

4. На основе данных натуральных наблюдений за природными торнадо шести различных классов и за циклоном средней интенсивности с использованием конкретных вычислительных алгоритмов смоделированы течения газа в придонных частях всех перечисленных природных восходящих закрученных потоков. Основные газодинамические характеристики построенных течений совпадают с данными натуральных наблюдений.

## **Апробация**

Основные положения диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

Международная конференция «X Забабахинские научные чтения» (Снежинск, РФЯЦ – ВНИИТФ, 2010);

Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 110-летию академика М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2010);

Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко (Новосибирск, 2011);

X Всероссийский съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011);

Международная конференция «XI Забабахинские научные чтения» (Снежинск, РФЯЦ – ВНИИТФ, 2012);

А также:

Научная сессия НИЯУ МИФИ – 2011 (Снежинск, 2011);

Всероссийская школа молодых ученых «Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил» (Институт проблем механики РАН, Москва, 2010);

42-я Всероссийская молодежная школа – конференция (Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011);

Международная (43-я Всероссийская) молодежная школа – конференция (Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012);

Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы механики, математики, информатики – 2012» с международным участием, посвященной памяти С. Н. Черникова, И. Ф. Верещагина, Л. И. Волковысского

(ПГНИУ, Пермь, 2012).

## Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 9 печатных работ, из них 7 в соавторстве, в том числе работы [1, 2] в изданиях по перечню ВАК. В работах [6] и [7] приведены подробные выкладки доказательств теорем, опубликованных в работах [1] и [2] соответственно. Работа [3], изданная Pleiades Publishing, является переводом статьи [2].

В работах [1–7] Баутину С. П. принадлежит постановка задачи, а доказательства теорем проведены Крутовой И. Ю. В работе [1] Баутину П. С., Беловой Е. И., Замыслову В. Е., Мезенцеву А. В., Обухову А. Г. принадлежат результаты моделирования природных восходящих закрученных потоков, не включенные в данную работу.

Результаты работ [8, 9] получены единолично Крутовой И. Ю.

Также опубликованы 11 тезисов в трудах различных конференций [10–20].

## Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Текст диссертации содержит 105 страниц печатного текста, 75 рисунков, 14 таблиц. Список использованной литературы включает 58 наименований работ российских и зарубежных авторов.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность выбора темы диссертационной работы, охарактеризованы объект и предмет исследования, определены цель и задачи исследования. Сформулированы основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Первая глава** диссертации состоит из 3 параграфов.

В §1 для полноты изложения приведены ранее полученные другими авторами результаты. В том числе описана предложенная в книге Баутина С. П.<sup>6</sup> схема возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков. Кроме того, приведены известные факты о природе силы Кориолиса, ее проявлениях и вид системы уравнений газовой динамики (СУ-ГД) в условиях действия силы тяжести и силы Кориолиса в безразмерных пе-

---

<sup>6</sup>Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008. — 96 с.



ременных:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь:  $t$  – время;  $x, y, z$  – декартовы независимые переменные и в плоскости переменных  $x, y$  введена полярная система координат  $(r, \varphi)$ ;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  – скорость звука газа;  $\gamma = \text{const} > 1$  – показатель политропы газа в уравнении состояния  $p = \rho^\gamma/\gamma$ , где  $p$  и  $\rho$  – давление и плотность газа, в расчетах полагалась  $\gamma = 1.4$ ;  $u, v, w$  радиальная, окружная и вертикальная

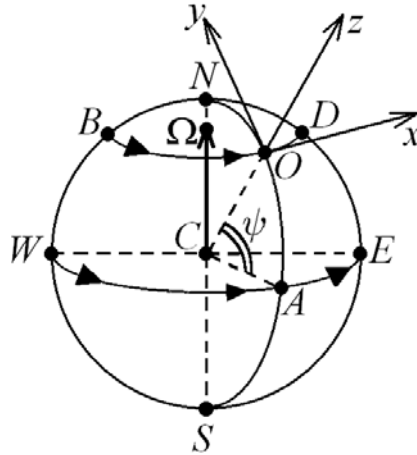


Рис. 1

составляющие вектора скорости газа соответственно;  $a = 2\Omega \sin \psi$ ;  $b = 2\Omega \cos \psi$ ;  $\Omega = |\Omega|$  – модуль угловой скорости вращения Земли;  $\psi$  – широта точки  $O$  на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости  $xOy$ , вращающейся вместе с Землей и касающейся поверхности Земли в точке  $O$  (рис. 1);  $g = \text{const} > 0$  – постоянное ускорение свободного падения. В §2 рассматривается СУГД (1). Для нее ставится специальная характеристическая задача Коши, решение которой описывает плавный радиальный сток первоначально покоящегося в поле тяжести газа внутрь вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса. Пусть при  $t = 0$  вне цилиндра  $r = r_0$  (рис. 2) находится покоящийся в в поле газ с параметрами:

$$c = c_0(z) \equiv \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}; \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0. \quad (2)$$

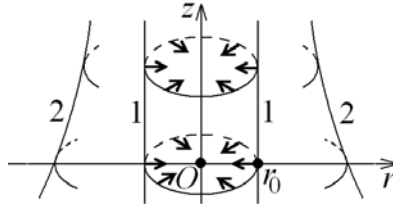


Рис. 2

С момента времени  $t = 0$  на поверхности цилиндра  $r = r_0$  начинается заданный радиальный сток газа внутрь цилиндра, то есть ставится условие

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = u^o(t), \quad u^o(t)|_{t=0} = 0, \quad [u^o(t)]'|_{t=0} = u_* = \text{const} < 0. \quad (3)$$

На поверхности  $C^+$ –характеристики

$$C^+ : r = r_0 + r_1(t, z), \quad (4)$$

где  $r_1(t, z)$  определяется из решения следующей задачи:

$$r_{1t} = c_0(z) \sqrt{1 + r_{1z}^2}; \quad r_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

ставятся условия (2).

Показано, что задача (1)–(3) с данными на характеристике (4) является характеристической задачей Коши стандартного вида, у которой существует единственное аналитическое решение в виде ряда

$$\mathbf{U}(\xi, \zeta, \varphi', \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi', \chi) \frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi', \chi) = \left( \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \xi^k} \right) \Big|_{\xi=0}, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \xi = r_0 + r_1(t, z) - r; \\ \zeta = r - r_0; \\ \varphi' = \varphi; \\ \chi = z. \end{cases}$$

Первые коэффициенты этого ряда имеют вид

$$v_1 = 0; \quad w_1 = -(r_{1z}|_{\xi=0}) u_1; \quad c_1 = \frac{(\gamma - 1)}{2} \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u_1. \quad (7)$$

$$v_2 = \frac{(-1)}{(r_{1t}|_{\xi=0})} \left\{ \frac{(r_{1t}|_{\xi=0})}{(\zeta + r_0)} u_{1\varphi} + [a + b (r_{1z}|_{\xi=0}) \sin \varphi] u_1 \right\}; \quad (8)$$

$$w_2 = -\frac{2 (r_{1z}|_{\xi=0}) c_0(\chi)}{(\gamma - 1) (r_{1t}|_{\xi=0})} c_2 - \frac{1}{(r_{1t}|_{\xi=0})} A_{11}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} = & -(r_{1t\xi}|_{\xi=0}) (r_{1z}|_{\xi=0}) u_1 + (r_{1z}|_{\xi=0}) \left[ 1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2 \right] u_1^2 + \\ & + c'_0(\chi) \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u_1 + c_0(\chi) \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u_{1\chi} + c_0(\chi) \frac{(r_{1z}|_{\xi=0}) (r_{1z\chi}|_{\xi=0})}{\sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2}} u_1 + \end{aligned}$$

$$+ (r_{1z\xi}|_{\xi=0}) c_0(\chi) \sqrt{1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2} u_1 + \\ + \frac{(\gamma - 1)}{2} (r_{1z}|_{\xi=0}) \left[ 1 + (r_{1z}|_{\xi=0})^2 \right] u_1^2 - b u_1 \cos \varphi,$$

а коэффициент  $u_1$  является решением следующего дифференциального уравнения (вид  $E_{11}$  и  $F_{11}$  здесь не приводится ввиду их громоздкости):

$$u_{1\zeta} - (r_{1z}|_{\xi=0}) u_{1\chi} + E_{11} u_1^2 + F_{11} u_1 = 0, \quad (10)$$

при начальном условии

$$u_1|_{\zeta=0} = \frac{u_*}{\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)g\chi}}. \quad (11)$$

Анализ первых коэффициентов (2), (7)–(11) ряда (6) показал, что при начале радиального стока сразу возникает окружное движение газа, закрученное в Северном полушарии в положительном направлении и в отрицательном – для случая Южного полушария. Установленные факты являются математическим обоснованием результатов соответствующих экспериментов<sup>7</sup> в части возникновения закрутки газа и ее направления.

В §3 моделируются трехмерные стационарные течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса. Для системы уравнений газовой динамики (1) поставлена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r, \varphi), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r, \varphi), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(t, r, \varphi), \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z); \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z); \quad r_{in} = \text{const} > 0, \end{cases} \quad (13)$$

с условиями согласования

$$\begin{cases} u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z)|_{z=0}, \\ v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z)|_{z=0}. \end{cases} \quad (14)$$

Решение задачи (1), (12), (13) описывает течение газа в окрестности непроницаемой плоскости  $z=0$ , когда через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса  $r = r_{in}$  осуществляется заданный приток газа.

Показано, что данная задача является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому при условии аналитичности входных данных у нее существует единственное аналитическое решение. Далее рассматривается

<sup>7</sup> Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 344 с.

стационарное решение задачи (1), (12), (13). Для моделирования трехмерного стационарного придонного течения таких природных вихрей, как торнадо и тропические циклоны, используется начальный отрезок ряда

$$\mathbf{U}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(r, \varphi) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(r, \varphi) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}(r, \varphi, z)}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (15)$$

задающего аналитическое решение задачи (1), (12), (13). Для нулевых коэффициентов ряда (15) выписана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c'_0 = -\frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \frac{\left[ u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u'_0 = u_0 \frac{\left[ c_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}. \end{cases} \quad (16)$$

и  $v_0(r)$  в явном виде

$$v_0(r) = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad (17)$$

что позволило при построении последующих коэффициентов ряда (15) применить разделение переменных:

$$c_1(r, \varphi) \equiv c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi, \quad (18)$$

$$u_1(r, \varphi) = u_{10}(r) + u_{11}(r) \cos \varphi + u_{12}(r) \sin \varphi, \quad (19)$$

$$v_1(r, \varphi) = v_{10}(r) + v_{11}(r) \cos \varphi + v_{12}(r) \sin \varphi, \quad (20)$$

$$w_1(r, \varphi) = 0, \quad (21)$$

$$c_2(r, \varphi) = c_{20}(r) + c_{21}(r) \cos \varphi + c_{22}(r) \sin \varphi + c_{23}(r) \cos 2\varphi + c_{24}(r) \sin 2\varphi, \quad (22)$$

$$u_2(r, \varphi) = u_{20}(r) + u_{21}(r) \cos \varphi + u_{22}(r) \sin \varphi + u_{23}(r) \cos 2\varphi + u_{24}(r) \sin 2\varphi, \quad (23)$$

$$v_2(r, \varphi) = v_{20}(r) + v_{21}(r) \cos \varphi + v_{22}(r) \sin \varphi + v_{23}(r) \cos 2\varphi + v_{24}(r) \sin 2\varphi, \quad (24)$$

$$w_2(r, \varphi) = w_{20}(r) + w_{21}(r) \cos \varphi + w_{22}(r) \sin \varphi + w_{23}(r) \cos 2\varphi + w_{24}(r) \sin 2\varphi. \quad (25)$$

Далее в параграфе приведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений и начальные данные для них, при решении которых однозначно определяются  $u_{11}(r)$ ,  $u_{12}(r)$ ,  $v_{11}(r)$ ,  $v_{12}(r)$ ,  $u_{20}(r)$ ,  $u_{21}(r)$ ,  $u_{22}(r)$ ,  $u_{23}(r)$ ,  $u_{24}(r)$ ,  $v_{20}(r)$ ,  $v_{21}(r)$ ,  $v_{22}(r)$ ,  $v_{23}(r)$ ,  $v_{24}(r)$ . При этом  $u_{10}(r) = v_{10}(r) = 0$ , а коэффициенты  $c_{10}(r)$ ,  $c_{11}(r)$ ,  $c_{12}(r)$ ,  $c_{20}(r)$ ,  $c_{21}(r)$ ,  $c_{22}(r)$ ,  $c_{23}(r)$ ,  $c_{24}(r)$ ,  $w_{20}(r)$ ,  $w_{21}(r)$ ,  $w_{22}(r)$ ,  $w_{23}(r)$ ,  $w_{24}(r)$  однозначно определяются с помощью коэффициентов  $u_2(r, \varphi)$ ,  $v_2(r, \varphi)$ .

**Вторая глава** диссертации состоит из двух параграфов 4 и 5.

В §4 описано получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых необходимо для построения последующих коэффициентов ряда (15):

$$u_{20r} = \frac{F_{u20}}{u_0}; \quad (26)$$

$$u_{21r} = \frac{F_{u21}}{u_0}; \quad (27)$$

$$u_{22r} = \frac{F_{u22}}{u_0}; \quad (28)$$

$$u_{23r} = \frac{F_{u23}}{u_0}; \quad (29)$$

$$u_{24r} = \frac{F_{u24}}{u_0}; \quad (30)$$

$$v_{20r} = \frac{F_{v20}}{u_0}; \quad (31)$$

$$v_{21r} = \frac{F_{v21}}{u_0}; \quad (32)$$

$$v_{22r} = \frac{F_{v22}}{u_0}; \quad (33)$$

$$v_{23r} = \frac{F_{v23}}{u_0}; \quad (34)$$

$$v_{24r} = \frac{F_{v24}}{u_0}; \quad (35)$$

где из-за громоздкости явный вид правых частей СОДУ (26)–(35) здесь не приводится. После решения этой СОДУ определяются коэффициенты в представлениях (18)–(25).

В §5 описано восстановление значений газодинамических параметров в физическом пространстве по результатам расчетов задач Коши для СОДУ, приведенной в §4. Значения газодинамических характеристик восстанавливаются численно с использованием начальных отрезков сходящихся рядов:

$$\begin{aligned} c(r, \varphi, z) = & c_0(r) + [c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi]z + \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{1} \frac{1}{c_0(r)} [bu_1(r) \cos \varphi + bv_1(r) \cos \varphi - \\ & - \frac{2}{(\gamma - 1)} (c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi)^2] \frac{z^2}{2}; \quad (36) \\ u(r, \varphi, z) = & u_0(r) + [u_{11}(r) \cos \varphi + u_{12}(r) \sin \varphi]z + \end{aligned}$$

$$+[u_{20}(r) + u_{21}(r) \cos \varphi + u_{22}(r) \sin \varphi + u_{23}(r) \cos 2\varphi + u_{24}(r) \sin 2\varphi] \frac{z^2}{2}; \quad (37)$$

$$v(r, \varphi, z) = v_0(r) + [v_{11}(r) \cos \varphi + v_{12}(r) \sin \varphi]z +$$

$$+[v_{20}(r) + v_{21}(r) \cos \varphi + v_{21}(r) \sin \varphi + v_{23}(r) \cos 2\varphi + v_{24}(r) \sin 2\varphi] \frac{z^2}{2}; \quad (38)$$

$$w(r, \varphi, z) = w_2(r, \varphi) \frac{z^2}{2}; \quad (39)$$

Поэтому полученные зависимости передают искомое трехмерное стационарное течение приближенно. Восстановление траекторий движения отдельных частиц газа, которые в рассматриваемом стационарном случае есть просто линии тока, осуществляется при решении следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dr} = \frac{w_2 \frac{z^2}{2}}{u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2}}, \\ \frac{d\varphi}{dr} = \frac{v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2}}{r [u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2}]}, \\ z|_{r=r_{in}} = z_0, \\ \varphi|_{r=r_{in}} = \varphi_0. \end{array} \right. \quad (40)$$

**Третья глава** диссертации состоит из трех параграфов 6, 7, 8. В этой главе приведены результаты численных расчетов и с их использованием проведен анализ газодинамических характеристик построенных течений.

#### Шкала Фудзиты

Класс торнадо	Скорость ветра, м/с	Ширина следа, м	Средняя длина пути, км	Среднее время жизни, мин
<i>F0</i>	19 – 32	5 – 15	1.9	2.4
<i>F1</i>	33 – 50	16 – 50	4.2	5.2
<i>F2</i>	51 – 70	51 – 160	8.7	10.8
<i>F3</i>	71 – 92	161 – 508	16.1	20.0
<i>F4</i>	93 – 116	547 – 1448	43.8	54.4
<i>F5</i>	117 – 142	1609 – 4989	57.1	71.0

Решения соответствующих задач найдены при таких значениях входных параметров, которые соответствуют данным натуральных наблюдений за различными

классами торнадо и одного тропического циклона, среднего по своим характеристикам.

В §6 приведена шкала Фудзиты некоторых итоговых данных наблюдений для шести классов торнадо:  $F0$ ,  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ ,  $F4$ ,  $F5$  — охватывающих все встречающиеся на Земле торнадо различной интенсивности.

Обсуждается возможность использования шкалы Фудзиты для постановки начальных условий при решении соответствующих задач Коши для СОДУ из §4. Также в §6 приведены основные результаты расчетов течений для различных классов торнадо. Эти результаты оформлены в виде графического и табличного материала с соответствующими пояснениями.

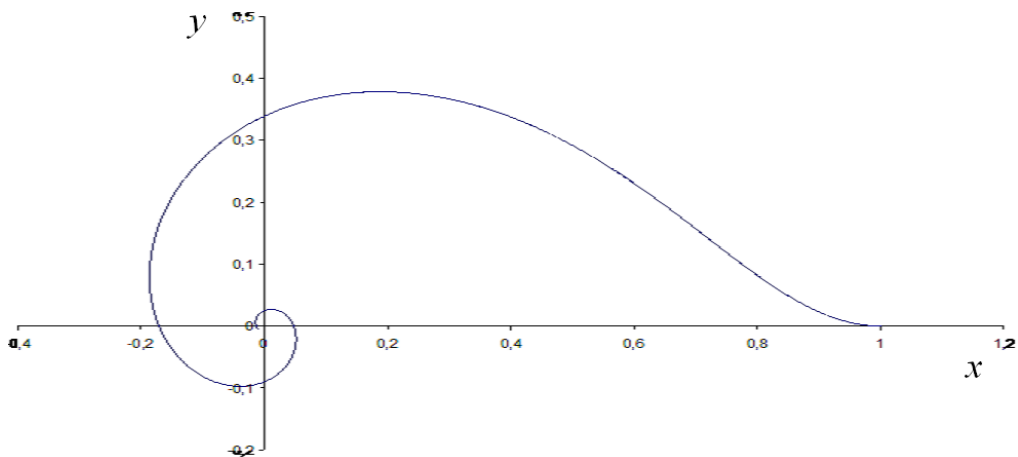


Рис. 3

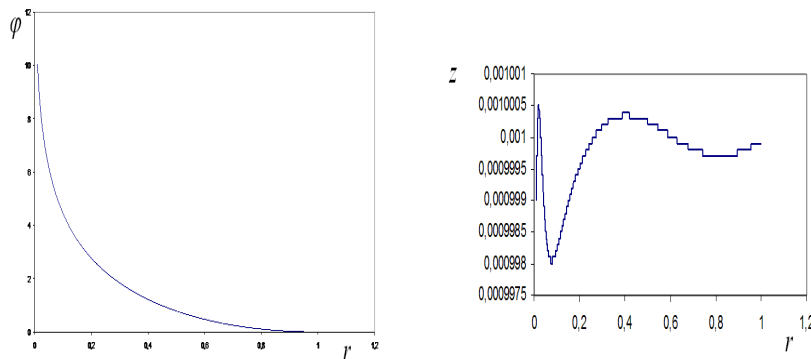
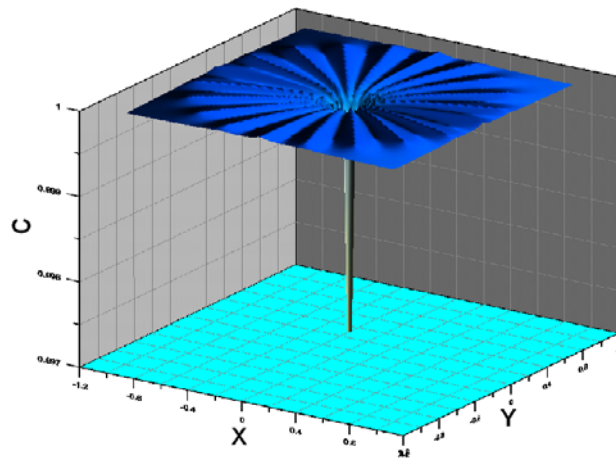


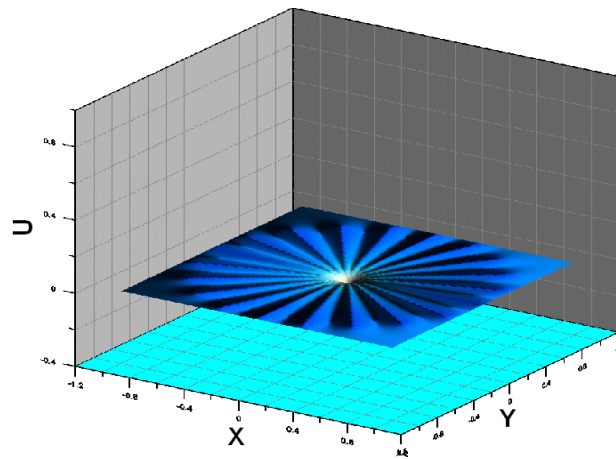
Рис. 4

Результаты массовых расчетов течений для всех указанных классов торнадо приведены в приложении.

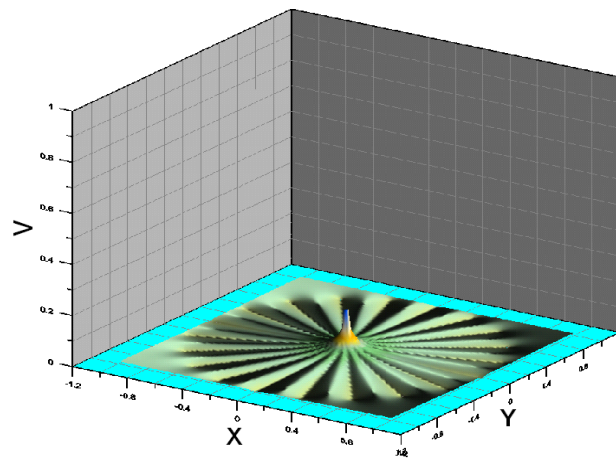
На рис. 3, 4 приведены проекции одной конкретной траектории линии тока на плоскости  $xOy$ ,  $rO\varphi$ ,  $rOz$  соответственно. На рис. 5–8 при  $z = 0.001$  представлены поверхности газодинамических распределений над плоскостью декартовых координат  $xOy$ .



*Puc. 5*



*Puc. 6*



*Puc. 7*



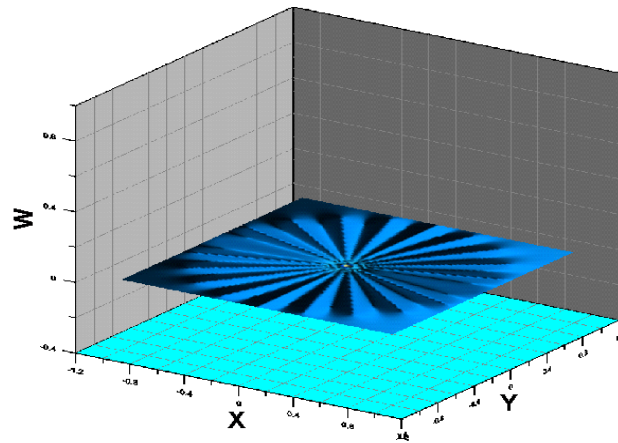


Рис. 8

Общие выводы по расчетам течений торнадо класса  $F3$  следующие.

Поток газа является трехмерным, в том числе с ростом  $z$  начинает принципиально зависеть от  $\varphi$ : при  $r \rightarrow r_0 + 0$  изменение газодинамических параметров при разных значениях  $\varphi$  проявляется сильнее, но тем не менее эти изменения в размерных значениях не очень велики, то есть при  $r \rightarrow r_0 + 0$  при изменении  $\varphi$  наблюдается небольшая «рябь» в потоке.

Из анализа представленного графического материала следует, что на рассматриваемых высотах  $z$  между  $z = 0$  и  $z = z^0 = 0.001$  (размерное значение  $z^0 = 0.001$  для торнадо класса  $F3$  равно 16 м) газодинамические параметры меняются незначительно при переходе на разные лучи  $\varphi = \text{const}$ . Но при приближении к цилиндру стока, то есть при  $r_0 \leq r \leq 0,1$ , каждый из газодинамических параметров претерпевает существенные для себя изменения:

1) значения  $c$  убывают при  $r \rightarrow r_0 + 0$ , следовательно при  $r \rightarrow r_0 + 0$  убывают значения плотности и давления газа. Однако абсолютные изменения этих величин малы — во втором, третьем знаке после десятичной точки;

2)  $v$  окружная компонента вектора скорости газа при  $r \rightarrow r_0 + 0$  растет от значений 0.03 до 0.25, что соответствует размерным значениям скорости 1 м/с и 80 м/с соответственно. Положительные значения  $v$  говорят о том, что закрутка газа происходит в положительном направлении;

3) значение  $u$  радиальной составляющей вектора скорости газа при  $r \rightarrow r_0 + 0$  отрицательно (газ течет к цилиндру стока) и основные изменения также происходят на отрезке  $r_0 \leq r \leq 0,1$  от значения 0.001 до 0.1, что соответствует размерным значениям 3 м/с и 33 м/с соответственно.

4)  $w$  вертикальная составляющая вектора скорости газа с ростом  $z$  и при  $r \rightarrow r_0 + 0$  мало по абсолютной величине, но меняет знак. Это говорит о том, что частицы газа при движении к  $r = r_0$  меняют направление своего движения «вверх-вниз», но непосредственно в окрестности цилиндра стока движутся вниз.

В §7 приведены данные статистической обработки показателей интенсив-

ности тропических циклонов и в первую очередь по скоростям движения в них воздушных масс — по скорости ветра. Сделаны некоторые общие выводы об отдельных особенностях функционирования тропических циклонов.

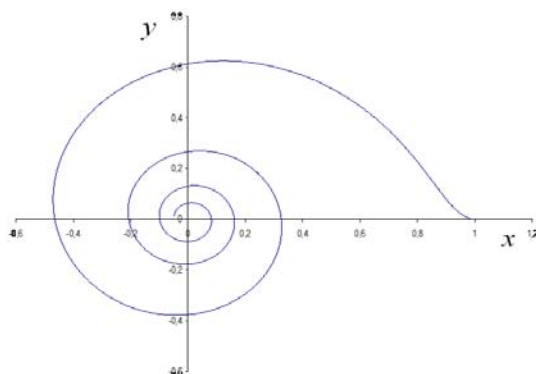


Рис. 9

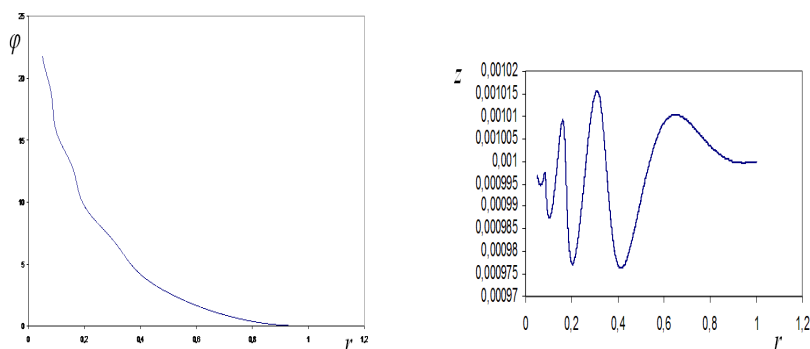


Рис. 10

Также в §7 приведены основные результаты расчетов подобных течений. Эти результаты оформлены в виде графического и табличного материала с соответствующими пояснениями. Результаты массовых расчетов течений для тропического циклона средней интенсивности приведены в приложении.

На рис. 9, 10 приведены проекции одной конкретной траектории линии тока на плоскости  $xOy$ ,  $rO\varphi$ ,  $rOz$  соответственно. На рис. 11–14 при  $z = 0.001$  представлены поверхности газодинамических распределений над плоскостью декартовых координат  $xOy$ .

Общие выводы по расчетам течений среднего по своим характеристикам тропического циклона следующие.

Поведение траекторий  $z = z(r)$  в зависимости от  $\varphi$  в отличие от траектории торнадо  $F3$  имеет существенно больше локальных экстремумов (3–4), а с учетом значений при  $r = r_0$  количество локальных максимумов достигает 5.

Перепад значений между локальным максимумом и локальным минимумом для каждого значения  $\varphi$  практически постоянно. Самые большие значе-

ния при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , а все остальные значения меньше.

Так же, как и у торнадо  $F3$ , при изменении  $\varphi$  наблюдается разное поведение частицы при уменьшении  $r$ . В районе  $\varphi = \pi/3; 2\pi/3$  при уменьшении  $r$  высота от плоскости  $z = 0$  сначала уменьшается, затем растет. А при  $\varphi = 4\pi/3; 5\pi/3$  высота сначала растет, а потом убывает.

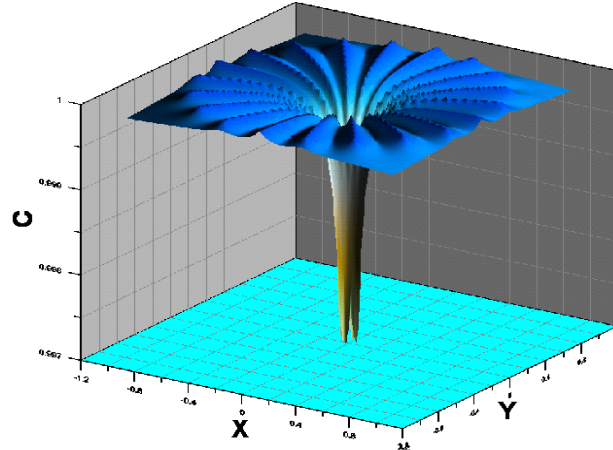


Рис. 11

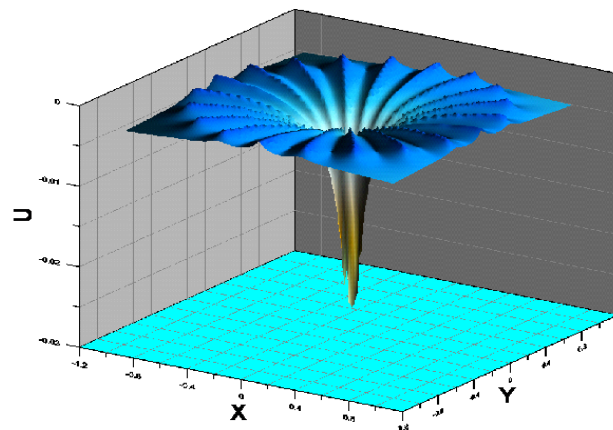


Рис. 12

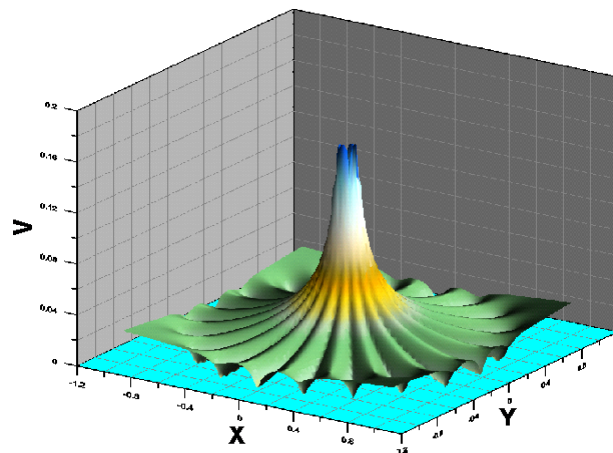


Рис. 13

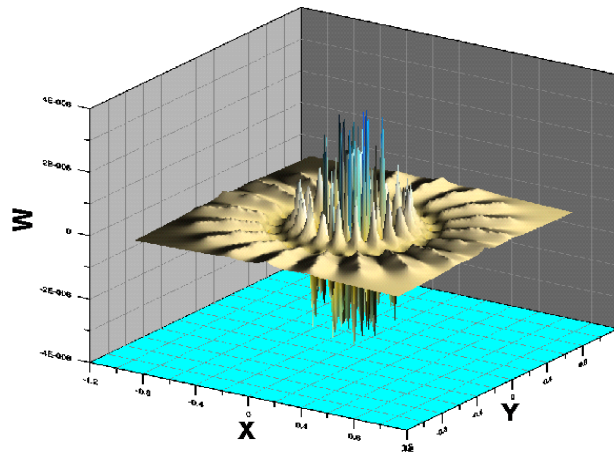


Рис. 14

Перепады высот на траектории порядка 1 м: так называемая «рябь» начинает наблюдаться уже при достаточно больших значениях  $r = 0.2 - 0.4$  безразмерных единиц, то есть на расстояниях 15–30 км от центра циклона (от центра «глаза» циклона).

Проявление «ряби» в потоке также фиксируется тем, что при высоте  $z = 0.001$  поведение кривой  $\varphi = \varphi(r)$  (одна из составляющих пространственной траектории поршня) при  $r \rightarrow 0$  с  $r = 0.2 - 0.4$  меняет характер выпуклости несколько раз (5–6). Однако в проекции траектории на плоскость  $xOy$  «рябь» визуально практически не фиксируется. Поскольку максимум  $\varphi = \varphi(r)$  при всех  $\varphi$  имеет значение порядка 12 радиан, а для циклона порядка 27 радиан, то закрутка потока (количество витков спирали) у циклона существенно больше.

При увеличении высоты уже с  $r = 1$  начинает проявляться немонотонность в поведении функций  $u$  и  $w$ , а функция  $c$  практически не меняется. Также не меняется максимальное значение  $v$ , которое достигается при  $r = v(r_0)$ . Несмотря на разные знаки  $u$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $u$  на стоке всегда отрицательно. Также с ростом высоты  $w$  принимает значения разных знаков, что говорит о более сложном поведении трехмерного потока при переходе от среднемасштабного восходящего закрученного потока (торнадо классов F0–F3) к крупномасштабным восходящим закрученным потокам (торнадо класса F5, тропический циклон).

Поведение газодинамических параметров  $u$ ,  $v$  и  $w$  с увеличением  $z$  начинает принципиально зависеть от  $r$  и от  $\varphi$ . Изменяется поведение графиков этих газодинамических параметров в зависимости от  $r$  и от  $\varphi$ , причем при  $r$  начиная с  $r = 1$  при уменьшении значений  $r$ . Однако эти изменения значений газодинамических параметров на характере поведения линий тока практически не сказывается: зависимость  $\varphi = \varphi(r)$  при разных значениях  $r$  меняет характер выпуклости;  $w = w(r)$  меняет знаки, имеет локальные экстремумы, но абсолютные перепады высот незначительные (5–6 м). А на проекции ли-

ний тока на плоскость переменных  $xOy$  изменения витков спирали визуально не фиксируются.

В §8 дается анализ результатов проведенных расчетов как для различных классов торнадо так и для циклона средней интенсивности. Благодаря этому сделаны выводы о свойствах трехмерных стационарных спиральных течениях, моделирующих движение воздуха в придонных частях разрушительных атмосферных вихрей.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В приложениях приведены результаты массовых расчетов для всех шести классов торнадо и для тропического циклона средней интенсивности.

### **Основные результаты работы**

1. Обосновано существование и единственность решения конкретной характеристической задачи Коши стандартного вида. Данное решение моделирует трехмерное нестационарное течение газа при наличии радиального стока в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

2. На основании исследования свойств первых коэффициентов бесконечных рядов, моделирующих течения с радиальным стоком, установлены факт возникновения закрутки и ее направление в исследуемом течении газа.

3. Численными методами приближенно построены трехмерные стационарные течения идеального газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости в условиях действия сил тяжести и Кориолиса.

4. Получены результаты массовых расчетов, которые приближенно моделируют течения газа в придонных частях природных торнадо различных классов, а также тропического циклона средней интенсивности.

#### **Список публикаций по теме диссертации**

##### **Статьи в изданиях из списка ВАК**

1. Баутин С. П., Баутин П. С., Белова Е. Д., Замыслов В. Е., Крутова И. Ю., Мезенцев А. В., Обухов А. Г. Математическое моделирование природных восходящих закрученных потоков типа торнадо // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 384–385.

2. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, №3. С. 473–475.

##### **Статьи в других изданиях**

3. Bautin S. P., Krutova I. Yu. Twisting of Smooth Gas Flow under the Action of Gravity and Coriolis Forces // High Temperature, ISSN 0018-151X, Pleiades Publishing, Ltd. 2012. Vol. 50, No. 3. Pp. 444–446.

4. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Об одном численно-аналитическом моделировании течений газа при учете действия силы Кориолиса // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст.: в 3 т. Т. 1.

/ НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В. О. Каледина.— Новокузнецк, 2010. С. 36–42.

5. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Задача о плавном стоке в переменных  $g, t$  как характеристическая задача Коши стандартного вида // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2011. № 1 (9). С. 4–13

6. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Задача о плавном стоке газа в переменных  $t, g, \varphi, z$  при учете сил тяжести и Кориолиса // Проблемы прикладной математики, механики и информатики: сб. науч. тр. / под общ. ред. С. Л. Дерябина, д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2011. - Вып. 95 (178)/ 6м. — С. 16–43.

7. Крутова И. Ю. Задача о движении газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 1 (13). — Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 14–22.

8. Крутова И. Ю. Трехмерное стационарное движение газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. № 3 (15), 2012 год. — Екатеринбург, Изд-во УрГУПС, 2012, С. 16–23.

#### **Тезисы в трудах конференций**

9. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Первушина Н. А. Об одном численно-аналитическом методе решения начально-краевых задач для эволюционных систем уравнений с частными производными // Забабахинские научные чтения: сб. материалов X Междунар. конф. 15–19 марта 2010. — Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010. — С. 276–277.

10. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Рощупкин А. В. Закрутка газа силой Кориолиса // Международной конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 110-летию академика М. А. Лаврентьева: тезисы докладов. 23–27 августа 2010 г. — Новосибирск, 2010. — С. 75.

11. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Первушина Н. А. Решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений с частными производными методом, близким к методу Бубнова-Галеркина // XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко: тезисы докладов. — Дюрсо, 15–20 сентября 2010. — С. 10–11.

12. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Численно-аналитическое исследование значений газодинамических характеристик, изменяемых в придонной части восходящего закрученного потока // Всероссийская школа молодых ученых «Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил». Сб. тезисов докладов. Москва, 30 ноября — 2 декабря 2010 г. — С. 21–22.

13. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Задача о плавном стоке при наличии силы Кориолиса // Современные проблемы математики. Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. 30 января – 6 февраля 2011 г. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011. – С. 90–92.

14. Баутин С. П., Замыслов В. Е., Крутова И. Ю. Математическое моделирование вихрей типа торнадо // Научная сессия НИЯУ МИФИ – 2011: Сб. тезисов докладов. Снежинск, 1–5 февраля 2011 г. – С. 21.

15. Баутин С. П., Крутова И. Ю. Аналитическое исследование течений газа, закрученных действием силы Кориолиса // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко: тезисы докладов. 30 мая–4 июня 2011 г., Новосибирск, Академгородок, 2011. – С. 120.

16. Крутова И. Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке // Современные проблемы математики. Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, 29 января – 5 февраля 2012 г. – Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012. – С. 372–374.

17. Баутин С. П., Белова Е. Д., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных природных восходящих закрученных потоков // Забабахинские научные чтения: сб. тезисов XI Международной конференции. 16–20 апреля 2012. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. – С. 283–284.

18. Крутова И. Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке // XIX Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко: Тезисы докладов. Дюрсо, 15–20 сентября 2012. – С. 57–59.

19. Крутова И. Ю. Математическое моделирование спиральных течений идеального газа // Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы механики, математики, информатики – 2012» с международным участием, посвященная памяти С. Н. Черникова, И. Ф. Верещагина, Л. И. Волковысского: тезисы докладов. – Пермь: ПГНИУ, 30 октября – 1 ноября 2012. – С. 98–98.

### **Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ**

Крутова И. Ю. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619314. Моделирование трехмерного стационарного потока идеального газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, 16.10.2012.

КРУТОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

---

Подписано к печати 19.04.2013 г.

Формат бумаги 60 × 84 1/16

Тираж 120 экз.

Объем усл. печ. л. 1,5

Заказ 63

---

Издательство УрГУПС, 620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66